Séquence 4 : compléments de dérivation et convexité d'une fonction

1 Rappels et compléments de dérivation

On appelle fonction dérivée de f ou plus simplement dérivée de f la fonction, notée f' qui à tout x associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x.

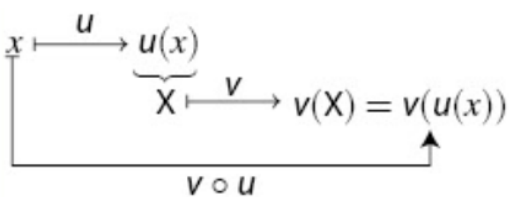
1.1 Dérivée des fonctions usuelles

Type de fonction	Expression	Fonction dérivée
Constante	$f(x) = C$ avec $C \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Affine	$f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$	$f'(x) = m$
Carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
Puissance	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Type de fonction	Expression	Fonction dérivée
Fonction cosinus	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
Fonction sinus	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Fonction exponentielle	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

1.2 Composée de deux fonctions

Définition. *Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I, .on ait $v(x) \in J$.*
*La **fonction composée** de u suivie de v, notée $v \circ u$ est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.*



Exemple. *Donner l'expression littérale des fonctions composées suivantes, en précisant les intervalles de définition :*

- *pour $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x^2$, donner $u \circ v$ et $v \circ u$.*
- *pour $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 4x + 2$, donner $f \circ g$ et $g \circ f$.*
- *pour $h(x) = 3x^2 - 1$ et $v(x) = \cos(x)$, donner $u \circ v$ et $v \circ u$.*

Proposition. *Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout $x \in I$, on ait $v(x) \in J$.*
Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$,

$$\boxed{(v \circ u)'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)}.$$

Exemple. *Déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f = v \circ u$ avec $u(x) = 3x^2 + 5$ et $v = 6\sqrt{x}$.*

1.3 Opérations sur les dérivées

On considère deux fonctions f et g dérivables. Le tableau suivant donne des règles de calculs pour des fonctions construites à partir des fonctions usuelles :

Opération	Fonction	Dérivée
Somme	$U+V$	$U'+V'$
Produit par un réel $\lambda \in \mathbb{R}$	λU	$\lambda U'$
Produit de deux fonctions	$U \times V$	$U' \times V + U \times V'$
Inverse	$\dfrac{1}{U}$	$-\dfrac{U'}{U^2}$

Opération	Fonction	Dérivée
Quotient	$\dfrac{U}{V}$	$\dfrac{U' \times V - U \times V'}{V^2}$
Puissance ($n \in \mathbb{N}^*$)	U^n	$n \times U' \times U^{n-1}$
Exponentielle	e^U	$U' \times e^U$

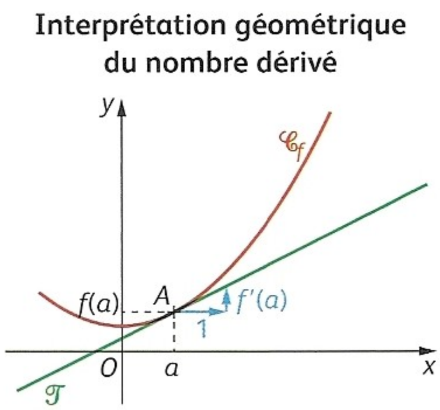
2 Tangente à une courbe en un point

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A est la position limite de la droite (AM) quand le point M se rapproche de A, tout en restant sur la courbe $\mathcal{C}_f$.

Définition. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel de cet intervalle et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère (O, I, J) du plan.*
Si f est dérivable en a, la ***tangente*** *à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.*

Proposition. *L'équation de la tangente au point $A(a, f(a))$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère (O, I, J) est :*

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



3 Convexité : définition et conséquences graphiques

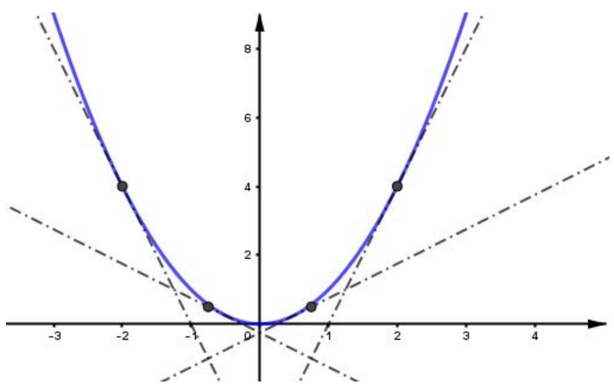
3.1 Fonction convexe, fonction concave

Définition. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère.*

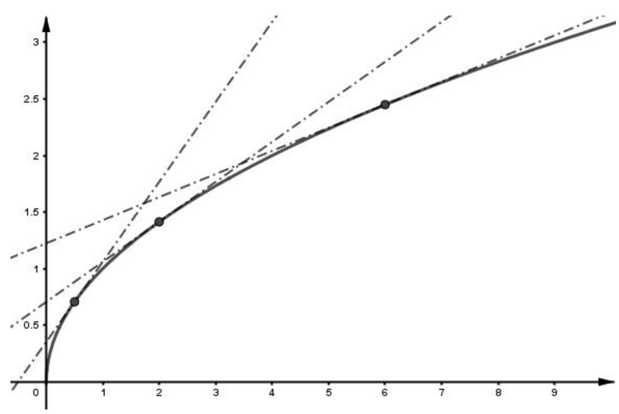
- *f est* ***convexe*** *sur I si $\mathcal{C}$ est entièrement située AU-DESSUS de chacune de ses tangentes.*
- *f est* ***concave*** *sur I si $\mathcal{C}$ est entièrement située EN-DESSOUS de chacune de ses tangentes.*

Exemple.

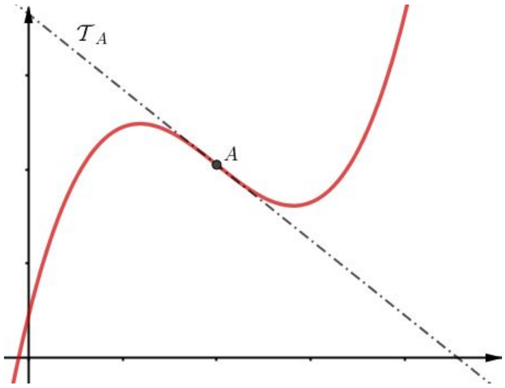
→ la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.



→ la fonction racine carrée est concave sur $]0\,;+\infty[$.

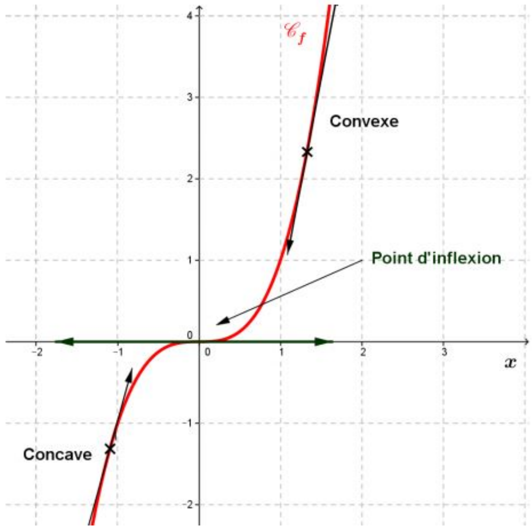


3.2 Point d'inflexion d'une courbe



Définition. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère.*

Le point A de $\mathcal{C}$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si au point A, la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente en A.



Remarque. *La courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f dérivable admet un point d'inflexion en A d'abscisse a quand la fonction f passe de concave à convexe ou de convexe à concave en a.*

Exemple. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère.*

4 Convexité d'une fonction et dérivée

Dans la partie précédente, on a pu constater que :

- lorsque f est convexe, le coefficient directeur des tangentes augmente lorsque x augmente ; autrement dit la fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ est croissante.
- lorsque f est concave, le coefficient directeur des tangentes augmente lorsque x diminue ; autrement dit la fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ est croissante.

Proposition. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante.*
- *f est convexe sur I si et seulement si f' est décroissante.*

En pratique, la convexité d'une fonction dérivable est donnée par le sens de variation de sa dérivée f', ainsi il faut étudier la dérivée de la fonction f', que l'on appelle **dérivée seconde** et que l'on note f''.

Proposition. *Soit f une fonction dérivable sur I dont la dérivée f' est dérivable sur I.*

- *f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.*
- *f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.*
- *La courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.*

Exemple. *Déterminer la convexité et les points d'inflexion des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 7 \quad ; \quad f_2(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x - 11 \quad ; \quad f_3(x) = 2x^4 + x^3 - 15x^2 - 5x + 10$$